

# Target Volatility & Risk Control Indizes

Ulrich Stoof (Bloomberg LP)

&

Christian Menn (RIVACON & FH Mainz)

---

## Agenda

- Einleitung/Motivation
- Der „Risk Control Mechanismus“
- Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzer
- Konkrete Beispiele: DAX, SPX, SX5E
- Bewertung von Optionen auf Risk Control Indizes
- Eine Approximationsformel zur Optionsbewertung

## Agenda

- **Einleitung/Motivation**
- Der „Risk Control Mechanismus“
- Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzer
- Konkrete Beispiele: DAX, SPX, SX5E
- Bewertung von Optionen auf Risk Control Indizes
- Eine Approximationsformel zur Optionsbewertung

## Einleitung / Motivation

Klassische Garantiestruktur:

Zero-Bond +  $\alpha \cdot$  Option

Einflussfaktoren:

- Zinsen
- Forwards
- Volatilitäten

## Einleitung / Motivation

Aktuelle Niedrigzinsphase lässt klassische Garantieprodukte unattraktiv aussehen.

Mögliche Auswege:

- Niedrige Partizipationsraten
- Exotische Optionen mit hoher „Knock-Out-Wahrscheinlichkeit“ auf klassische Underlyings (Barriers, Cliquets etc.)
- Klassische Optionen auf exotische Underlyings → Risk-Control-Indizes / Portfolios

## Agenda

- Einleitung/Motivation
- **Der „Risk Control Mechanismus“**
- Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzer
- Konkrete Beispiele: DAX, SPX, SX5E
- Bewertung von Optionen auf Risk Control Indizes
- Eine Approximationsformel zur Optionsbewertung

## Der Risk-Control-Mechanismus: Ziele

Konstruiere einen Index mit der Möglichkeit

- a) Die Volatilität zu steuern / vorzugeben
- b) Den Forward zu steuern / vorzugeben

→ Dynamisches Portfolio als Excess- bzw. Total-Return-Index

## Der Risk-Control-Mechanismus: Das Prinzip

- Wähle ein volatiles Asset  $A$  (z.B. Aktie, Index, Fond), und ein schwankungsarmes Asset  $B$  (z.B. Geldmarktkonto)
- Typische Annahme: die Volatilität des Assets  $B$  ist vernachlässigbar gering.
- Bilde ein Portfolio:

$$P_t = \omega_t A_t + (1 - \omega_t) B_t$$



## Der Risk-Control-Mechanismus: Die Formel

$$I_t^{RC} = I_{t-1}^{RC} \cdot (1 + \pi_t^{RC}) \cdot (1 - r_{t-1}\tau)$$

Indexstand  
des RC Index

Tagesrendite  
des RC-Index

Optionaler  
Excess Return  
Faktor

$$\pi_t^{RC} = \omega_{t-1}\pi_t^A + (1 - \omega_{t-1})\pi_t^B$$

Dynamisches  
Portfoliogewicht

Renditen der Assets  
A und B

## Bestimmung des Portfoliogewichts $\omega$

Aus der Formel für die Varianz einer Summe von Zufallsvariablen ergibt sich:

$$V\pi_t^{RC} = \omega_{t-1}^2 V\pi_t^A + 2\omega_{t-1}(1 - \omega_{t-1}) \underbrace{\text{Cov}(\pi_t^A, \pi_t^B)}_{=0} + (1 - \omega_{t-1})^2 \underbrace{V\pi_t^B}_{=0}$$

$$\rightarrow V\pi_t^{RC} = \omega_{t-1}^2 V\pi_t^A \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\pi_t^{RC}} = \omega_{t-1} \cdot \sigma_{\pi_t^A}$$

$$\rightarrow \omega_{t-1} = \frac{\sigma_{TARGET}}{\sigma_{\pi_t^A}}$$

## Agenda

- Einleitung/Motivation
- Der „Risk Control Mechanismus“
- **Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzer**
- Konkrete Beispiele: DAX, SPX, SX5E
- Bewertung von Optionen auf Risk Control Indizes
- Eine Approximationsformel zur Optionsbewertung

## Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzung

Aus historischen Daten:

- Klassischer Varianzschätzer
- Exponentially Weighted Moving Average

Aus impliziten Volatilitäten:

- Z.B. VIX/VSTOXX (faire Varianzswap-Raten)

## Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzung

- Klassischer Varianzschätzer:

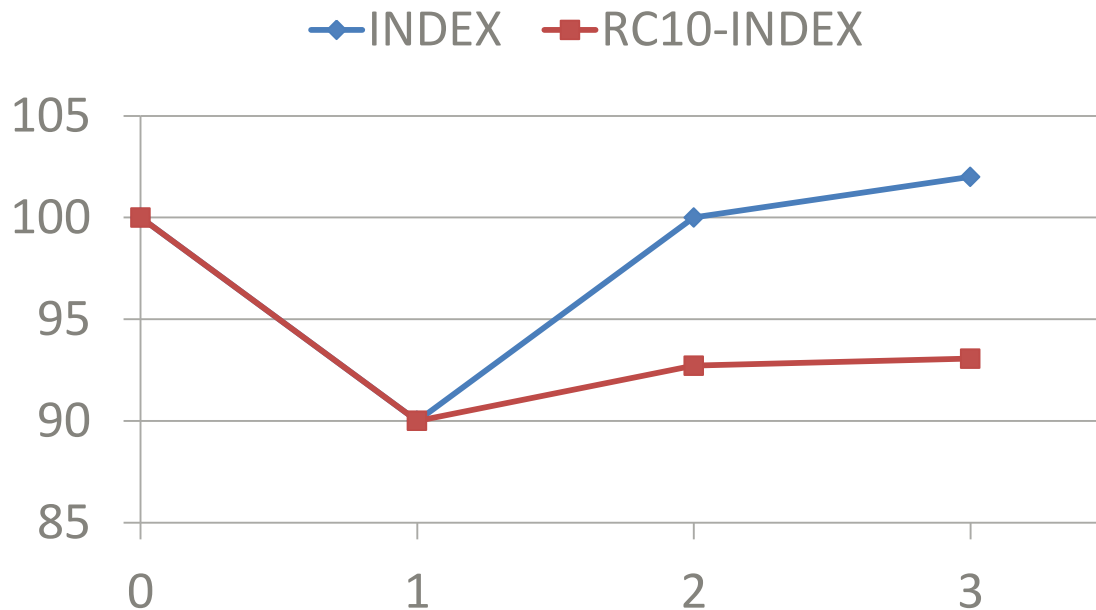
$$\hat{\sigma}_{t,N}^2 = \frac{252}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \log \frac{S_{t-i}}{S_{t-i-1}} \right)^2$$

- Exponentially Weighted Moving Average

$$\hat{\sigma}_{t,\rho}^2 = \rho \cdot \hat{\sigma}_{t-1,\rho}^2 + (1 - \rho) \cdot 252 \cdot \left( \log \frac{S_t}{S_{t-1}} \right)^2$$

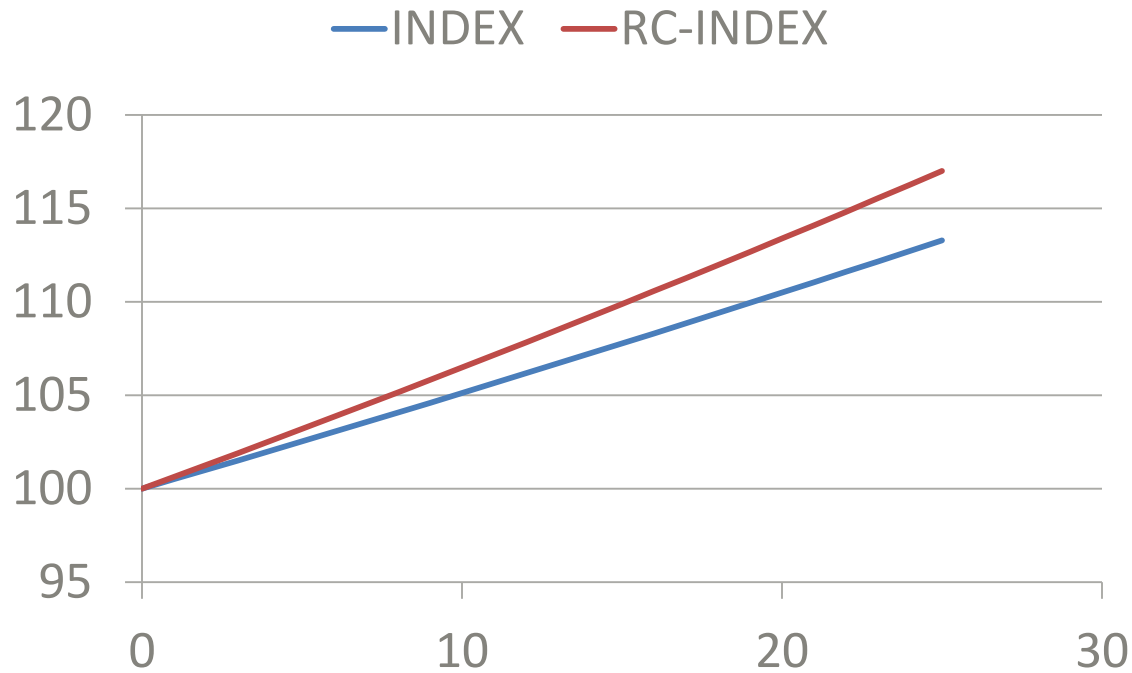
## Performance Beispiel I

Indexzeitreihe: 100, 90, 100, 102:



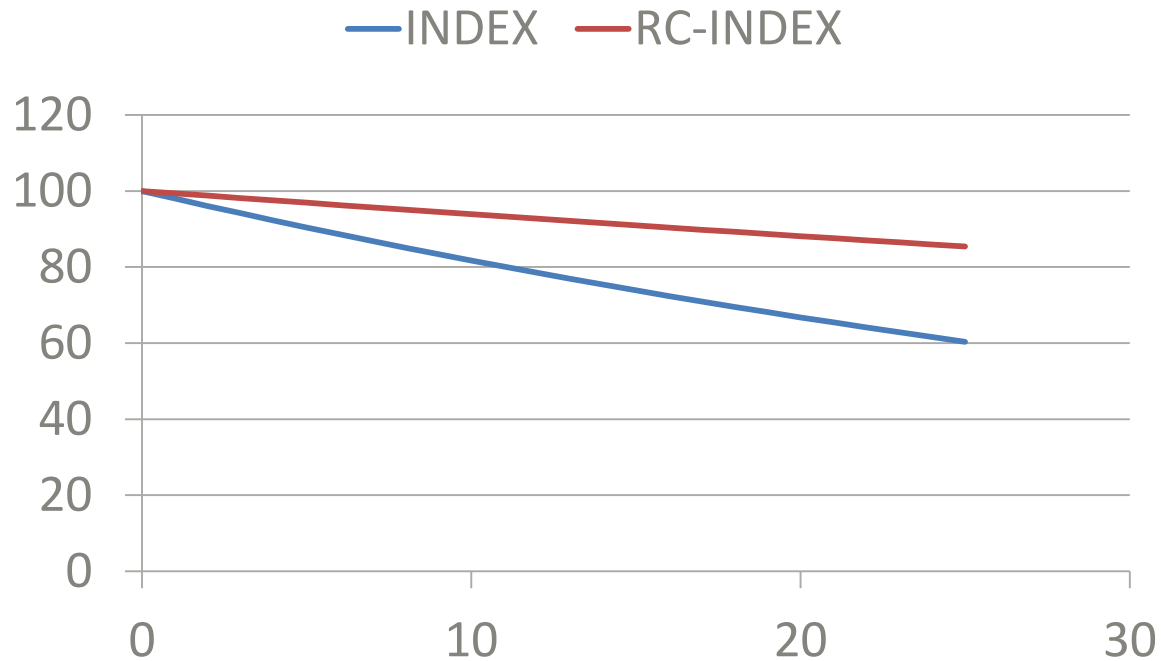
## Performance Beispiel II

Indexzeitreihe: +0.5% pro Tag



## Performance Beispiel III

Indexzeitreihe -2% pro Tag





## Agenda

- Einleitung/Motivation
- Der „Risk Control Mechanismus“
- Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzer
- **Konkrete Beispiele: DAX, SPX, SX5E**
- Bewertung von Optionen auf Risk Control Indizes
- Eine Approximationsformel zur Optionsbewertung

## Beispiele für Risk-Control-Indizes

- DAX RC10
  - Excess/Total Return Variante
  - Volschätzung aus 20-/60-Tages historische Volatilität
  - Leverage Cap 150%
- SPX
  - Excess/Total Return
  - Volatilitätsschätzung mittels EWMA
- SX5E
  - Excess und Total Return Variante
  - Volschätzung aus impliziten Volatilitäten (VSTOXX)
  - Leverage Cap 150%

## Agenda

- Einleitung/Motivation
- Der „Risk Control Mechanismus“
- Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzer
- Konkrete Beispiele: DAX, SPX, SX5E
- **Bewertung von Optionen auf Risk Control Indizes**
- Eine Approximationsformel zur Optionsbewertung

## Optionen auf RC-Indizes

Durch den Risk-Control-Mechanismus können neue Underlyings erzeugt werden, mit vorgegebenen Eigenschaften bezüglich Forward (Total-Return/Excess-Return) und Volatilität.

→ Nutze diese Underlyings als Basis für Optionsstrategien (z.B. zur Konstruktion von Garantiestrukturen)

## Exkurs: Bewertung von Optionen

Um eine Option auf ein Underlying bewerten zu können, benötigt man die „risikoneutrale“ Dynamik des Underlyings, d.h. man benötigt den Forward (Drift), sowie die Volatilität.

Allgemeine Bewertungsformel:

$$p = DF \cdot E(\text{Payoff})$$

## Exkurs: Bewertung von Optionen

- Bekanntestes Beispiel: Geometrische Brownsche Bewegung / Black-Scholes-Formel

$$C = DF \cdot (F N(d_1) - K N(d_2))$$

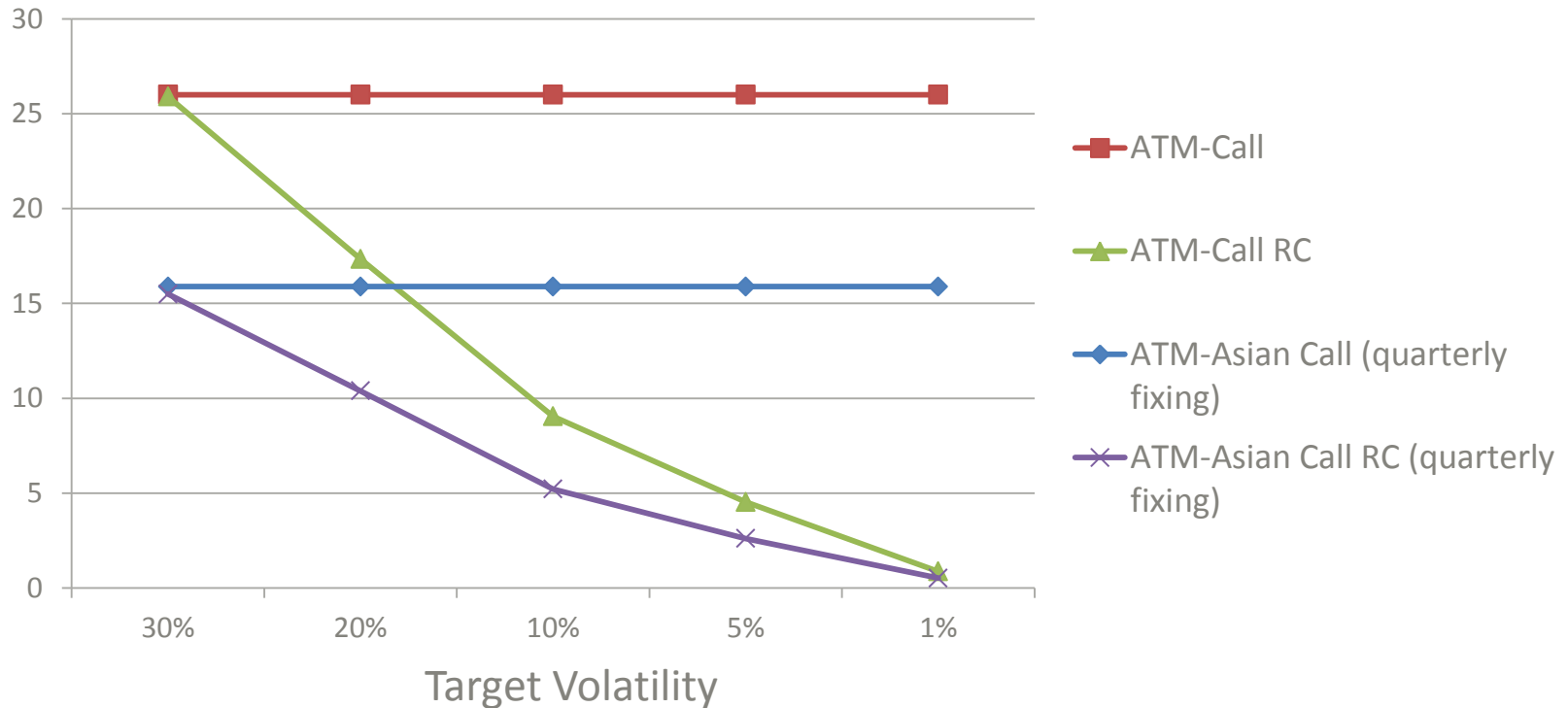
- Allgemeiner: Local Volatility mit PDE-Lösung (falls möglich) oder MC-Verfahren
- Noch allgemeiner: Mehrfaktormodelle, z.B. Stochastic Volatility

## MC-Bewertung einer Option auf einen RC-Index

- Bestimme/kalibriere Dynamik des Basisunderlyings (aus Plain-Vanilla-Optionen)
  - Simuliere Basis-Underlying (Monte-Carlo)
  - Bestimme Pfade des RC-Underlyings mit Hilfe der Formel für das Portfoliogewichts
  - Auswertung des Optionspayoffs auf den Pfaden
  - Diskontierung
- Aufwändige Implementierung

# Optionspreise für verschiedene Target Vols

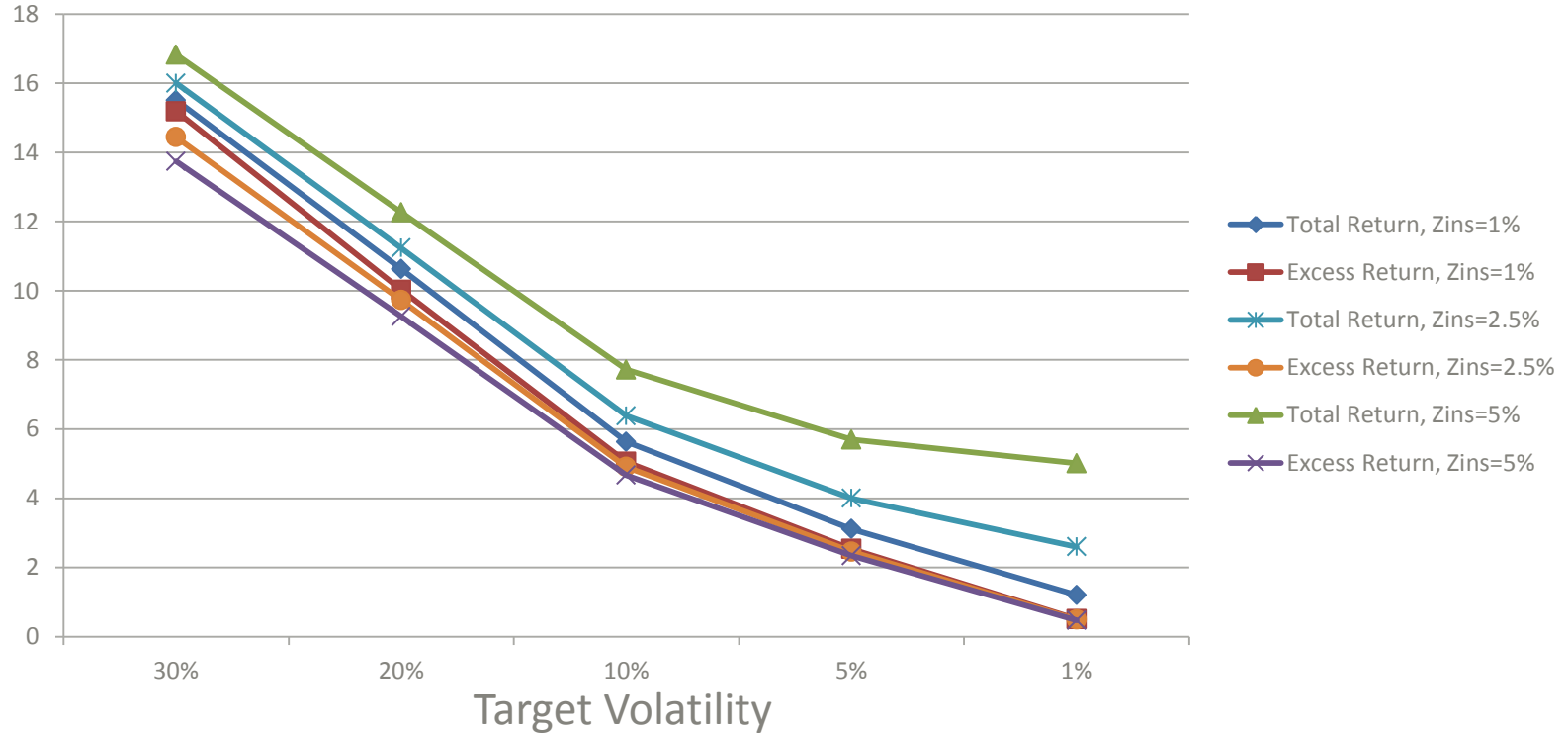
Underlying:  $S=100$ , Zins=0%, Volatilität=30%  
Laufzeit 5 Jahre





## Optionspreise Excess vs Total Return RC

Underlying: S=100, Volatilität=30%  
Laufzeit 5 Jahre, Quarterly Asianing



## Agenda

- Einleitung/Motivation
- Der „Risk Control Mechanismus“
- Exkurs: Varianz- und Volatilitätsschätzer
- Konkrete Beispiele: DAX, SPX, SX5E
- Bewertung von Optionen auf Risk Control Indizes
- **Eine Approximationsformel zur Optionsbewertung**

## Dynamik eines RC-Index (Approximation)

Am Beispiel des DAX RC10 Excess Return ergibt sich:

$$\text{Drift (lokal): } \mu_t^{RC} = \omega_{t-1} (\mu_t^{DAX} - \mu_t^{EONIA})$$

$$\text{Volatilität (lokal): } \sigma_t^{RC} = \omega_{t-1} \sigma_t^{DAX} \approx 10\%$$

→ Verwendung dieser Größen in der klassischen Bewertungsformel (Black-Scholes) führt zu guten Approximationen

→ Einziges Problem: Was ist ein guter Schätzer für  $\omega = E(\omega_{t-1})$

## Herleitung der Drift Formel für den DAX RC10 ER

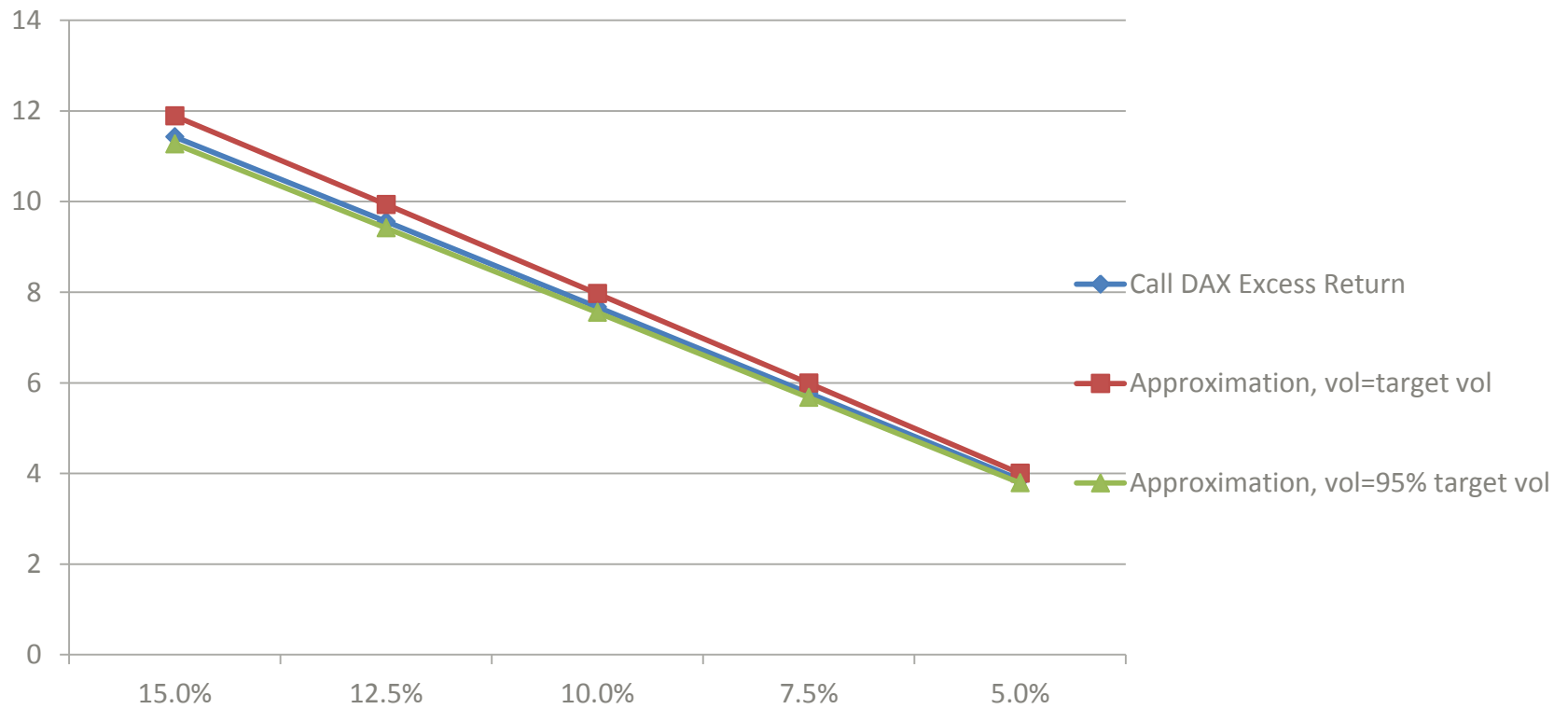
$$I_t^{RC} = I_{t-1}^{RC} \cdot \underbrace{(1 + \pi_t^{RC}) \cdot (1 - r_{t-1}\tau)}_{=1 + \mu_t^{RC} \approx 1 + \pi_t^{RC} - r_{t-1}\tau}$$

$$\rightarrow \mu_t^{RC} = \omega_{t-1} \pi_t^{DAX} + (1 - \omega_{t-1}) \pi_t^{EONIA} - r_{t-1}\tau$$

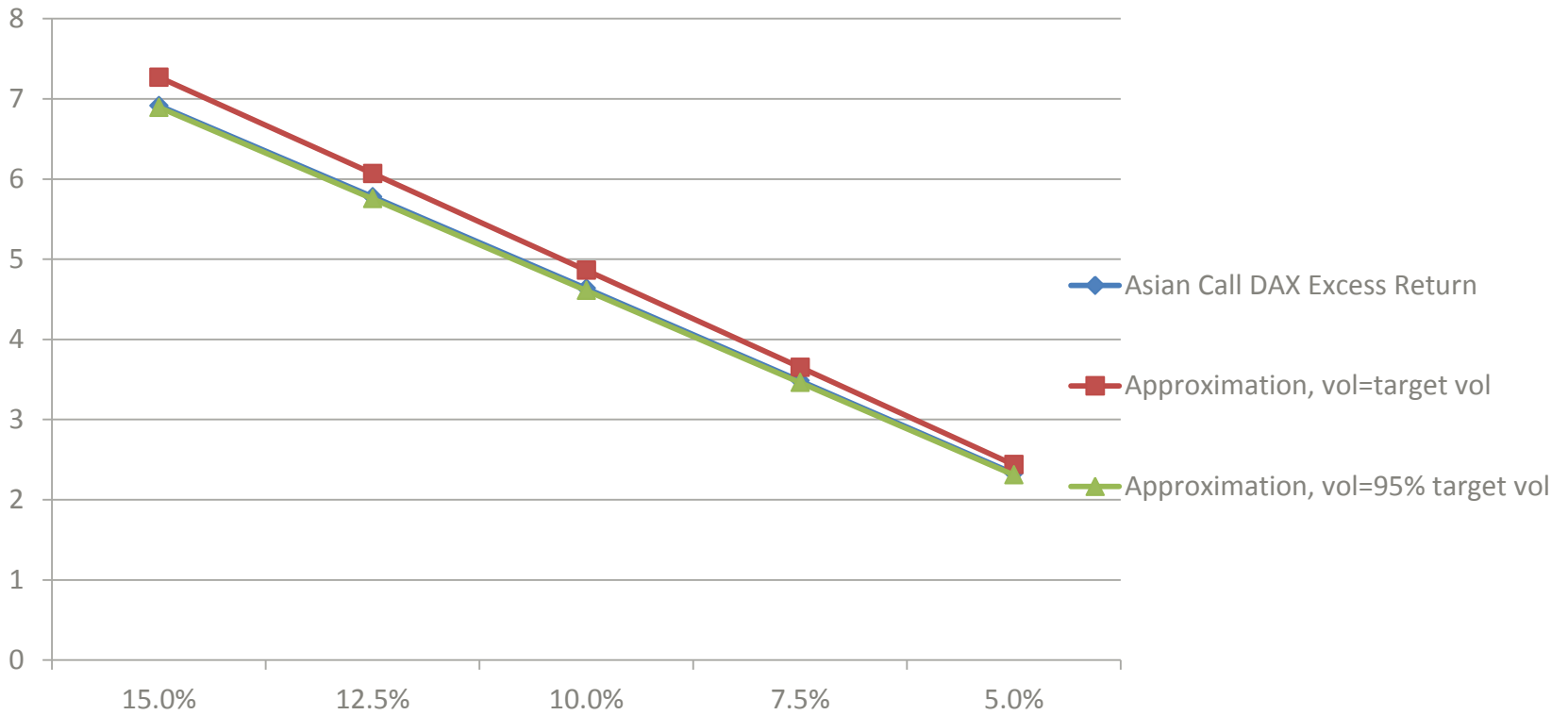
$$\rightarrow \mu_t^{RC} = \omega_{t-1} \pi_t^{DAX} + (1 - \omega_{t-1}) r_{t-1}\tau - r_{t-1}\tau$$

$$\rightarrow \mu_t^{RC} = \omega_{t-1} (\pi_t^{DAX} - \pi_t^{EONIA})$$

## Ergebnisse (echte Vol, 5y ATM Call)



## Ergebnisse (echte Vol, 5y Asian Call)



## Zusammenfassung

- Generisches Verfahren zur Bestimmung von RC Indizes → kann auf alternative Underlyings (z.B. Fonds) angewendet werden
- Das Verfahren kann auch auf zwei risky Assets angewendet werden, z.B. Aktien- und Bond-Index (s. S&P RC 2.0)
- Bewertung von Derivaten allgemein nur mit aufwendiger MC-Implementierung möglich
- Mithilfe der Approximationsformel kann eine Bewertung näherungsweise ohne großen Aufwand durchgeführt werden

## Anhang / Verweise

- DAX Familie Index-Guide:  
[http://www.dax-indices.com/EN/MediaLibrary/Document/Strategy\\_Indices\\_L\\_2\\_10\\_e.pdf](http://www.dax-indices.com/EN/MediaLibrary/Document/Strategy_Indices_L_2_10_e.pdf)
- Bloomberg: Definition of Historical Volatility Estimates
- STOXX Strategy Index Guide:  
[http://www.stoxx.com/download/indices/rulebooks/stoxx\\_strategy\\_guide.pdf](http://www.stoxx.com/download/indices/rulebooks/stoxx_strategy_guide.pdf)
- S&P Index Guide: <http://www.standardandpoors.com/indices/sp-500-risk-control-indices/en/us/?indexId=sp-500-risk-control-indices>



## Kontakt

Christian Menn

Email: [c.menn@rivacon.com](mailto:c.menn@rivacon.com)

Web: <http://rivacon.com>